Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Προχειρη Δοκιμασια **3**

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

4 - 4 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(x + \kappa z,\ 2\kappa y,\ \kappa y + 2z\big)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες η* f *είναι διαγωνοποιήσιμη.*

Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 3

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

4 - 4 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \ f(x,y,z) = (x+kz, \ 2ky, \ ky+2z)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Λύση. *Βρίσκουμε πρώτα το πίνακα της f στη κανονική βάση $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:*

$$\left\{\begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,0,0) \\ f(0,1,0) = (0,2k,k) \\ f(0,0,1) = (k,0,2) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{M}(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathsf{M}(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ είναι

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 2k-\lambda & 0 \\ 0 & k & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2k-\lambda & 0 \\ k & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2k-\lambda)(2-\lambda)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) *Αν $2k \neq 1$ και $2k \neq 2$, δηλαδή $k \neq \frac{1}{2}$ και $k \neq 1$, τότε έχουμε ότι η f έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές:*

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 2k$$

Συνεπώς, η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

(2) *Έστω ότι $2k = 1$, δηλαδή $k = \frac{1}{2}$. Τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι δύο και η η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ είναι ένα. Για να είναι η f διαγωνοποιήσιμη θα πρέπει*

$$\dim \mathcal{V}(1) = 2 \ \ \textit{και} \ \ \dim \mathcal{V}(2) = 1$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε μια ιδιοτιμή λ σε ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, τότε ισχύει

$$1 \ \leq \ \dim \mathcal{V}(\lambda) \ \leq \ \textit{αλγεβρική πολλαπλότητα της } \lambda$$

Άρα πράγματι έχουμε $\dim \mathcal{V}(2) = 1$. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = z = 0$$

Τότε $\mathcal{V}(1) = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle$ και άρα ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$ έχει διάσταση $\dim \mathcal{V}(1) = 1$. Επομένως, στη περίπτωση όπου το $k = \frac{1}{2}$ η f δεν είναι διαγωνοποιήσιμη.

(3) *Έστω ότι* $2k = 2$, *δηλαδή* $k = 1$. *Τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής* $\lambda_1 = 1$ *είναι ένα, ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής* $\lambda_2 = 2$ *είναι δύο. Άρα για να είναι η* f *διαγωνοποιήσιμη θα πρέπει*

$$\dim \mathcal{V}(1) = 1 \ \ \textit{και} \ \ \dim \mathcal{V}(2) = 2$$

Όπως παραπάνω ισχύει ότι $\dim \mathcal{V}(1) = 1$. *Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(2)$ *έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = z \ \ \textit{και} \ \ y = 0$$

Τότε $\mathcal{V}(2) = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1) \rangle$ *και άρα ο ιδιόχωρος* $\mathcal{V}(2)$ *έχει διάσταση* $\dim \mathcal{V}(2) = 1$. *Επομένως, στη περίπτωση όπου το* $k = 1$ *η* f *δεν είναι διαγωνοποιήσιμη.*

Άρα συνοψίζουμε ότι για $k \neq \frac{1}{2}$ *και* $k \neq 1$ *η* f *είναι διαγωνοποιήσιμη.* $\square$